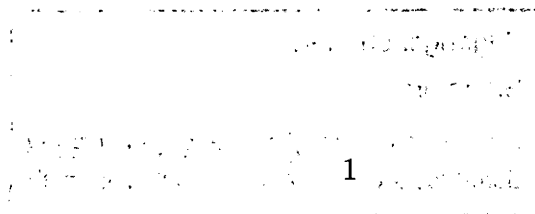


Lokale Lagrange-Interpolation mit C^1 -Splines vom Grad ≥ 5

Gero Hecklin

Nr. 274/2003



Lokale Lagrange-Interpolation mit C^1 -Splines vom Grad ≥ 5

Gero Hecklin

Institut für Mathematik, Universität Mannheim
68131 Mannheim, Mai 2003

Zusammenfassung

Wir entwickeln eine Methode zur lokalen Lagrange-Interpolation mit C^1 -Splines vom Grad ≥ 5 auf beliebigen Triangulierungen Δ . Nach Auswahl geeigneter Kanten der Triangulierung unterteilen wir Δ algorithmisch in Dreiecke verschiedenen Typs. Darauf basierend konstruieren wir Lagrange-Interpolationspunkte für die Splineräume $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$. Wir beweisen, dass die zugehörigen dualen Basisfunktionen lokalen Träger besitzen, und die Approximationsordnung der Interpolationsmethode optimal ist.

AMS Subject Classification: 65D05, 65D07, 41A63, 41A15

Keywords: Bivariate Splines, Triangulierungen, Interpolation, Approximationsordnung, schwache Interpolation.

1. Einleitung

In dieser Arbeit betrachten wir den Raum der bivariaten C^r -Splines vom Grad q auf einer Triangulierung Δ eines polygonalen Grundgebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\mathcal{S}_q^r(\Delta) = \{s \in C^r(\Omega) : s|_T \in \mathcal{P}_q \text{ für alle } T \in \Delta\}.$$

Dabei ist $\mathcal{P}_q = \text{span}\{x^i y^j : i, j \geq 0, i + j \leq q\}$ der Raum der bivariaten Polynome vom totalen Grad q und $C^r(\Omega)$ die Menge aller r mal differenzierbaren Funktionen auf Ω . Grundlegende Probleme in der Theorie der bivariaten Splineinterpolation sind die Bestimmung der Dimension von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ und die Konstruktion von Interpolationsmengen für diese Splineräume. Eine Menge $L = \{z_1, \dots, z_m\}$, wobei m die Dimension von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ ist, heißt

Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$, falls zu jeder Funktion $f \in C(\Omega)$ genau ein Spline $s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$ mit

$$s(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

existiert. Werden neben Funktionswerten auch partielle Ableitungen einer genügend oft differenzierbaren Funktion f interpoliert, und ist die Gesamtanzahl der Bedingungen gleich m , so sprechen wir von einer Hermite-Interpolationsmenge.

In der Literatur gibt es eine Reihe von Methoden zur Hermite-Interpolation mit Splines von hohem Polynomgrad q relativ zur Differenzierbarkeitsordnung r . Morgan und Scott [23] bestimmten Dimension und Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$, auf beliebige Triangulierungen Δ . Davydov [12] konstruierte dazu alternative Hermite-Interpolationsmengen, bei denen die Basisfunktionen der interpolierenden Splineräume lokal linear unabhängig sind. Die Ergebnisse von Morgan und Scott wurden von Alfeld, Piper und Schumaker [3], basierend auf Resultaten von Alfeld und Schumaker [2], für C^r -Splines vom Grad $q \geq 4r+1$ verallgemeinert. Hong [19] untersuchte Splineräume vom Grad $q \geq 3r+2$ und berechnete deren Dimension für beliebige Triangulierungen. Dieses Resultat wurde von Ibrahim und Schumaker [20] für Supersplineräume verallgemeinert. Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [15] entwickelten einen Algorithmus zur Konstruktion von lokalen Hermite-Interpolationsmengen mit optimaler Approximationsordnung für diese Räume.

Über Lagrange-Interpolation existieren zahlreiche Arbeiten für Klassen von Triangulierungen, sowie für beliebige Triangulierungen Δ in denen geeignete Dreiecke unterteilt werden. Davydov und Nürnberger [14] konstruierten induktiv Lagrange-Interpolationsmengen für $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$, $q \geq 4$ auf der Klasse der beliebigen Triangulierungen Δ , bei denen in Ausnahmefällen die Triangulierung modifiziert wird. Für die Klasse der regelmäßigen Rechteckszerlegungen Δ^1 und Δ^2 , mit einer bzw. zwei Diagonalen in jedem Rechteck, konstruierten Nürnberger und Riessinger [25] für beliebiger q und r Lagrange- und Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume $\mathcal{S}_q^r(\Delta^i)$, $i \in \{1, 2\}$. Nürnberger [26] (s.a. Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [12]) bzw. Nürnberger und Walz [28] konstruierten Interpolationsmengen für C^1 -Splines vom Grad ≥ 4 auf diesen Triangulierungen, wobei sie unter Verwendung von Techniken der schwachen Interpolation die Approximationsordnung dieser Methode bestimmten. Kürzlich entwickelten Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [13] Interpolationsmengen für kubische C^1 -Splines auf Nested Polygon-Triangulierungen, d.h. Triangulierungen in-einander geschachtelter geschlossener Polygonzüge. Eine Methode zur lokalen Lagrange-Interpolation mit C^1 -Splines vom Grad ≥ 3 auf beliebigen Triangulierungen, die optimale Approximationsordnung besitzt wurde von Nürnberger und Zeilfelder [31] entwickelt. Dabei werden etwa die Hälfte der Dreiecke der Triangulierung unterteilt. Wenig später konstruierte Kohlmüller [21] auf beliebigen Triangulierungen Δ Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$, $q \geq 3$, mit fast optimaler Approximationsordnung, wobei i.A. nur etwa ein Viertel der Dreiecke von Δ gesplittet werden.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Methode zur lokalen Lagrange-Interpolation mit C^1 -Splines vom Grad ≥ 5 auf beliebigen Triangulierungen Δ zu entwickeln, wobei keine Dreiecke von Δ unterteilt werden, und bei der die Approximationsordnung optimal ist. Im ersten Schritt der Methode unterteilen wir die Triangulierung Δ in sieben verschiedene Typen von Dreiecken, und wählen in einer Verallgemeinerung der Methode von Alfeld, Piper

und Schumaker [1] zur Konstruktion von Pfaden für jeden inneren nichtsingulären Knoten v eine geeignete in v nichtdegenerierte Kante. Darauf aufbauend konstruieren wir für $q \geq 5$ Lagrange-Interpolationspunkte für den Splineraum $S_q^1(\Delta)$. Hierbei verwenden wir die festgelegten Pfade, und wählen Interpolationspunkte auf der Triangulierung für die jeweiligen Dreieckstypen. Im Anschluß bestimmen wir die Größe der Träger der dualen Basissplines, und weisen so die Lokalität der Lagrange-Interpolation, d.h. die lokale Berechenbarkeit der interpolierenden Splines nach. Mit Hilfe der von Nürnberger [26] (s.a. Nürnberger und Walz [28], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [12,15], Nürnberger und Zeilfelder [31]) entwickelten Techniken der schwachen Interpolation zeigen wir dann, dass diese Methode der Lagrange-Interpolation mit $S_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$ optimale Approximationsordnung besitzt. Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. In Abschnitt 2 erläutern wir einige Grundlagen über bivariate Polynome und Splines, Interpolation mit Splineräumen und schwache Interpolation. Den Algorithmus zur Zuordnung von Dreieckstypen und zur Festlegung der geeigneten Pfade beschreiben wir in Abschnitt 3. Darauf aufbauend konstruieren wir in Abschnitt 4 Lagrange-Interpolationsmengen für C^1 -Splines vom Grad ≥ 5 und weisen die Lokalität der Interpolation nach. In letzten Abschnitt beweisen wir die Optimalität der Approximationsordnung der Interpolationsmethode.

2. Grundlagen

In diesem Kapitel erläutern wir einige Grundlagen über Triangulierungen, bivariate Polynome und Splines, Interpolation mit bivariaten Splines, Approximationsgüte und schwache Interpolation, die auf Alfeld, Piper und Schumaker [1], Nürnberger [26], Nürnberger und Zeilfelder [31], Schumaker [32] u.a. zurückgehen.

Definition 2.1:

Sei Ω , eine einfach zusammenhängende, nicht notwendigerweise konvexe, polygonale Teilmenge des \mathbb{R}^2 , zerlegt in Dreiecke T_1, \dots, T_N , sodass der Durchschnitt zweier verschiedener Dreiecke entweder leer, ein gemeinsamer Eckpunkt oder eine gemeinsame Kante ist. Dann heißt $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine TRIANGULIERUNG VON Ω . Ist $\Delta' \subset \Delta$ eine Triangulierung einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$, so heißt Δ' SUBTRIANGULIERUNG VON Δ .

Im Folgenden setzen wir

$V_I(\Delta)$, $V_B(\Delta)$, $V(\Delta)$: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Knoten,
$E_I(\Delta)$, $E_B(\Delta)$, $E(\Delta)$: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Kanten,
$N(\Delta)$: Menge der Dreiecke
$\sigma(\Delta)$: Menge der singulären Knoten, und
$\text{diam}(\Delta)$: maximaler Aussenkreisradius der Dreiecke

der Triangulierung Δ . Dabei gelten folgende wohlbekannten Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\#E_B(\Delta) &= \#V_B(\Delta) \\
\#E_I(\Delta) &= 3 \cdot \#V_I(\Delta) + \#V_B(\Delta) - 3 \\
\#N(\Delta) &= 2 \cdot \#V_I(\Delta) + \#V_B(\Delta) - 2.
\end{aligned}$$

Eine Kante $e := [v_1, v_2] \in E(\Delta)$ heißt DEGENERIERT IM ENDPUNKT v_1 , falls die beiden benachbarten Kanten im Knoten v_1 gleiche Steigung besitzen. Ein Knoten $v \in V_I(\Delta)$ heißt SINGULÄR, falls es genau vier Kanten mit Endpunkt v gibt, und diese auf zwei Geraden liegen (vgl. Abbildung 1).

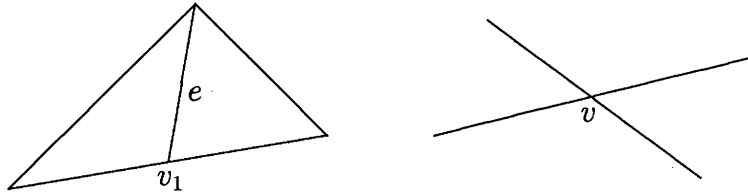


Abb. 1: In v_1 degenerierte Kante e , singulärer Knoten v .

Für einen Knoten $v \in V(\Delta)$ definiert $\text{Grad}(v)$ die Anzahl der Kanten in Δ mit Endpunkt v . Die Subtriangulierung $\Delta_v := \{T \in \Delta \mid v \in T\}$ von Δ , die alle Dreiecke mit Eckpunkt v enthält, bezeichnen wir als ZELLE VON v (vgl. Abbildung 2). Wir setzen $st(v) = \cup\{T \mid T \in \Delta_v\}$ und definieren für $n \geq 2$ induktiv $st^n(v) = \cup\{T \in \Delta \mid T \cap st^{n-1}(v) \neq \emptyset\} \subset \Omega$.

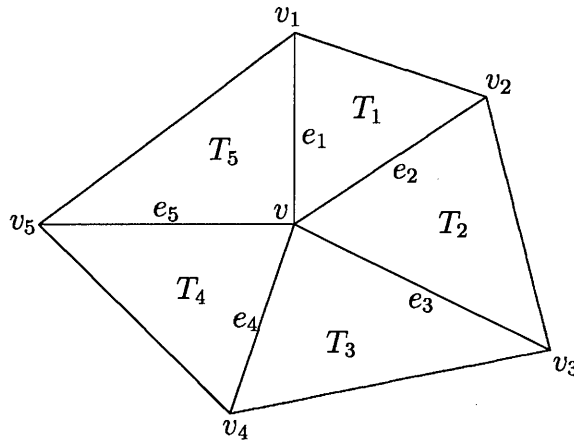


Abb. 2: Beispiel einer Zelle vom Grad 5.

Definition 2.2:

Seien $r, q \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r < q$ und eine Triangulierung Δ gegeben. Dann heißt

$$\mathcal{S}_q^r(\Delta) = \{s \in C^r(\Delta) : s|_T \in \mathcal{P}_q \text{ für alle } T \in \Delta\}$$

der SPLINERAUM der r mal differenzierbaren Funktionen vom Grad q . Dabei ist

$$\mathcal{P}_q = \text{span}\{x^i y^j : i, j \geq 0, i + j \leq q\}$$

der $\binom{q+2}{2}$ dimensionale Raum der BIVARIATEN POLYNOME vom totalen Grad $\leq q$.

Funktionen aus $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ sind also stückweise Polynome vom Grad q , die r mal stetig differenzierbar über den Kanten von Δ verknüpft sind.

Ein grundlegendes Problem der bivariaten Splinetheorie ist neben der Bestimmung der Dimension von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ die Konstruktion von Interpolationsmengen für diese Splineräume. Eine Menge $L = \{z_1, \dots, z_m\}$, wobei m die Dimension von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ ist, heißt Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$, falls zu jeder Funktion $f \in C(\Omega)$ genau ein Spline $s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$ mit

$$s(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

existiert. Werden neben Funktionswerten auch partielle Ableitungen einer genügend oft differenzierbaren Funktion f interpoliert, und ist die Gesamtanzahl der Bedingungen gleich m , so sprechen wir von Hermiteinterpolation.

Für beliebige Triangulierungen Δ ist nach Morgan und Scott [23] die Dimension der Splineräume $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$ bekannt. Für $q \geq 5$ gilt:

$$\dim(\mathcal{S}_q^1(\Delta)) = \binom{q+2}{2} + \binom{q}{2} \#E_I(\Delta) - [\binom{q+2}{2} - \binom{3}{2}] \#V_I(\Delta) + \sigma$$

Definition 2.3:

Sei $d = \dim(\mathcal{S}_q^r(\Delta))$ und $L = \{z_i, i = 1, \dots, d\}$ eine Lagrange-Interpolationsmenge des Splineriums $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$. Dann heißt der Spline $s_i \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$ mit der Eigenschaft

$$s_i(z_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

FUNDAMENTALSPLINE bzgl. L : Die Menge $\{s_i, i = 1, \dots, d\}$ bildet offensichtlich eine Basis von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$, genannt die DUALE BASIS bzgl. L .

Für einen Einheitsvektor $d \in \mathbb{R}^2$ und eine genügend oft differenzierbare Funktion f bezeichnen wir mit $f_d(z)$ die partielle Ableitung von f im Punkt z in Richtung d . Sind d_1 und d_2 linear unabhängige Einheitsvektoren, so heißt

$$D^w f(z) = (f_{d_1^w}(z), f_{d_1^{w-1}d_2}(z), \dots, f_{d_1d_2^{w-1}}(z), f_{d_2^w}(z))$$

der GEORDNETE VEKTOR DER PARTIELLEN ABLEITUNGEN vom Grad w .

Im Folgenden untersuchen wir die partiellen Ableitungen zweier bivariater Polynome auf benachbarten Dreiecken, die stetig differenzierbar über der gemeinsamen Kante verknüpft sind. Seien $T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2$ zwei Dreiecke mit gemeinsamer Kante $[v, v_2]$, d_i für $i = 1, \dots, 3$ ein Einheitsvektor entlang der Kante $e_i = [v, v_i]$ und α_i für $i = 1, 2$ der von e_i und e_{i+1} eingeschlossene Winkel. Ferner seien $p^{[T_i]} \in \mathcal{P}_q$, $q \geq 5$ auf T_i , $i = 1, 2$ stetig differenzierbar über e_2 verknüpft.

Lemma 2.4:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ läßt sich $p_{d_3 d_2^n}^{[T_1]}(v)$ aus $p_{d_1 d_2^n}^{[T_1]}(v)$ und $p_{d_2^{n+1}}^{[T_1]}(v)$ eindeutig berechnen.

Beweis:

Ist e_2 in v nichtdegeneriert, so gilt

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) p_{d_2}^{[T_1]} = \sin(\alpha_1) p_{d_3}^{[T_1]} + \sin(\alpha_2) p_{d_1}^{[T_1]},$$

und damit

$$p_{d_3 d_2^n}^{[T_2]}(v) = \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} p_{d_2^{n+1}}^{[T_1]} + \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} p_{d_1 d_2^n}^{[T_1]}.$$

Andernfalls gilt $\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$ und folglich

$$p_{d_3 d_2^n}^{[T_2]}(v) = -p_{d_1 d_2^n}^{[T_1]}(v).$$

#

Für die Interpolation einer gegebenen Funktion $f \in C^{q+1}(\Omega)$ ist es wichtig, dass der Interpolant $s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$ die Funktion f nicht nur in den Interpolationspunkten, sondern auf dem ganzen Gebiet Ω gut darstellt, d.h. die maximale Abweichung

$$\|f - s\| := \max_{x \in \Omega} |(f - s)(x)|$$

möglichst schnell gegen 0 geht, wenn die Anzahl der Interpolationspunkte steigt. Dies wird durch die sogenannte Approximationsordnung beschrieben.

Definition 2.5:

Sei $h = \text{diam}(\Delta)$ und α der kleinste Winkel der Triangulierung Δ . Dann heißt die größte Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die es eine nur von q , f und α aber nicht von h abhängige Konstante $K > 0$ gibt, sodass

$$\text{dist}(f, \mathcal{S}_q^r(\Delta)) := \inf_{s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)} \|f - s\| \leq K \cdot h^k,$$

die APPROXIMATIONSORDNUNG von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$.

Es ist wohlbekannt, dass $k = q + 1$ die optimale Approximationsordnung darstellt. Untersuchungen von de Boor und Jia [8] zeigten jedoch, dass i.A. nicht jeder interpolierende Spliner Raum diese besitzt. Wesentliche Faktoren sind dabei der Polynomgrad der Splines in Abhängigkeit der Differenzierbarkeitsordnung, sowie die Geometrie der Triangulierung (s.a. de Boor und Höllig [6], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [15]).

Mit Hilfe der Techniken der schwachen Interpolation bestimmte Nürnberger [26] (s.a. Nürnberger und Walz [28], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [12,15] und Nürnberger und Zeilfelder [31]) die Approximationsordnung zahlreicher Methoden der Lagrange- und Hermite-Interpolation mit Splineräumen. Wir verwenden im Folgenden einige der von Nürnberger

und Zeilfelder [31] bewiesenen Aussagen.

Seien T ein Dreieck mit $h = \text{diam}(T)$, z_1, \dots, z_m , $m = \dim(\mathcal{P}_q)$ (nicht notwendigerweise verschiedene) Punkte auf T . Für $l = 1, \dots, m$ definieren wir $i_l, j_l \in \mathbb{N}_0$ mit $k_l = i_l + j_l$ sowie Einheitsvektoren $d_{1,l}, d_{2,l}$ entlang der Kanten von T , wobei $d_{1,l}$ und $d_{2,l}$ für $i_l, j_l > 0$ linear unabhängig seien. Ferner sei $p \in \mathcal{P}_q$ für eine genügend oft differenzierbare Funktion f die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems

$$p_{d_{1,l}^{i_l} d_{2,l}^{j_l}}(z_l) = f_{d_{1,l}^{i_l} d_{2,l}^{j_l}}(z_l), \quad l = 1, \dots, m.$$

Lemma 2.6:

Sei $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ eine $q + 1$ -mal differenzierbare Funktion und $\sigma \in \{\rho + 1, \dots, q + 1\}$, wobei $\rho = \max\{k_l, l = 1, \dots, m\}$. Erfüllt $p \in \mathcal{P}_q$ die Bedingungen

$$|(f - p)_{d_{1,l}^{i_l} d_{2,l}^{j_l}}(z_l)| \leq C \cdot h^{\sigma - k_l}, \quad l = 1, \dots, m,$$

für eine (nur von q, f und dem kleinsten Winkel in Δ abhängige) Konstante $C > 0$, so gibt es eine Konstante $K > 0$ (nur abhängig von q, f und dem kleinsten Winkel in Δ), sodass für alle $w \in \{0, \dots, \sigma - 1\}$ gilt

$$\|D^w(f - p)\| \leq K \cdot h^{\sigma - w}.$$

Nürnberg und Zeilfelder zeigten, dass sich diese Aussage über bivariate Interpolation auch auf den univariaten Fall reduzieren lässt. Seien e eine Kante der Triangulierung der Länge h und z_1, \dots, z_{q+1} (nicht notwendigerweise verschiedene) Punkte auf e . Für $l = 1, \dots, q + 1$ sei $k_l \in \mathbb{N}_0$ und d ein Einheitsvektor entlang e . Ferner sei $p \in \Pi_q$ die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems

$$p_{d^{k_l}}(z_l) = f_{d^{k_l}}(z_l), \quad l = 1, \dots, q + 1.$$

Lemma 2.7:

Sei $f : e \rightarrow \mathbb{R}$ eine $q + 1$ -mal differenzierbare Funktion und $\sigma \in \{\rho + 1, \dots, q + 1\}$, wobei $\rho = \max\{k_l, l = 1, \dots, m\}$. Erfüllt ein univariates Polynom $p \in \Pi_q$ die Bedingungen

$$|(f - p)_{d^{k_l}}(z_l)| \leq C \cdot h^{\sigma - k_l}, \quad l = 1, \dots, q + 1,$$

für eine (nur von q, f und dem kleinsten Winkel in Δ abhängige) Konstante $C > 0$, so gibt es eine Konstante $K > 0$ (nur abhängig von q, f und dem kleinsten Winkel in Δ), sodass für alle $w \in \{0, \dots, \sigma - 1\}$ gilt

$$\|(f - p)_d\| \leq K \cdot h^{\sigma - w}.$$

3. Dreieckstypen und geeigneter Pfade

In diesem Abschnitt unterteilen wir die Dreiecke der Triangulierung Δ algorithmisch in sieben Dreieckstypen Typ i , $i = 0, \dots, 6$. Nachdem in Schritt 1 Dreiecke vom Typ 0 gewählt wurden, definieren wir in einer Verallgemeinerung der von Alfeld, Piper und Schumaker [1] entwickelten Methode darauf basierend geeignete Pfade für die Knoten der Triangulierung. In Abhängigkeit dieser Pfade ordnen wir dann in den restlichen Schritten 2 bis 7 den verbleibenden Dreiecken von Δ jeweils einen Typ zu.

Sei Δ eine beliebige Triangulierung, und seien alle Knoten von Δ unmarkiert. Dann gibt es folgende Schritte i , $i = 1, \dots, 7$:

Schritt 1: Wähle ein Dreieck $T \in \Delta$, das 3 unmarkierte Eckpunkte besitzt. Ordne T Typ 0 zu und markiere die Eckpunkte von T .

Schritt 2: Wähle ein Dreieck $T \in \Delta$, das genau 2 unmarkierte Eckpunkte besitzt, und dessen Kanten keine Pfade sind. Ordne T Typ 1 zu und markiere die Eckpunkte von T .

Schritt 3: Wähle ein Dreieck $T \in \Delta$, das genau einen unmarkierten Eckpunkt v besitzt, und dessen Kanten nicht der Pfad von v sind. Ordne T Typ 2 zu und markiere v .

Schritt i , $i \geq 4$: Wähle ein Dreieck $T \in \Delta$, das genau $i - 4$ Nachbardreiecke besitzt, denen bereits ein Typ zugeordnet wurde. Ordne T Typ $i - 1$ zu.

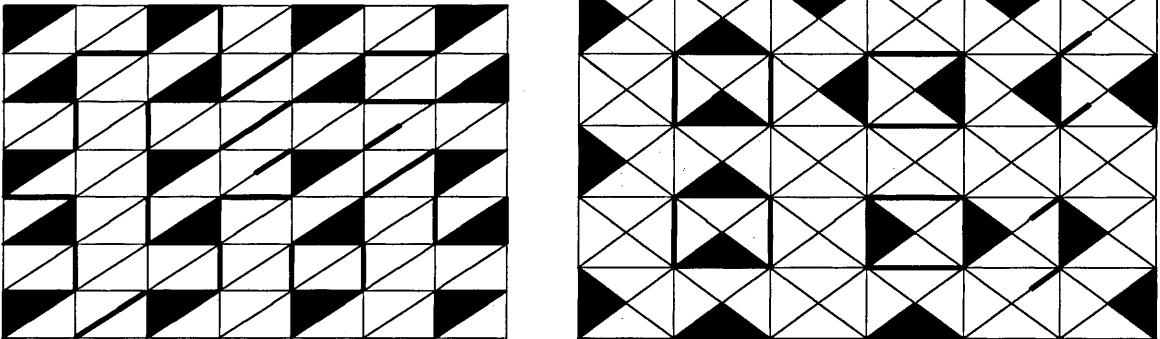


Abb. 3: Dreiecke vom Typ 0 und geeignete Pfade für Δ^1 und Δ^2 .

Bei der Festlegung der Pfade zwischen Schritt 1 und Schritt 2 gehen wir wie folgt vor:

Sei $V_{in}(\Delta)$ die Menge aller inneren nichtsingulären Knoten von Δ . Dann wählen wir für jedes $v \in V_{in}(\Delta)$ eine geeignete in v nichtdegenerierte Kante als Pfad für v . Dabei kann eine Kante $[u, v] \in E(\Delta)$ für u und v als Pfad dienen, sofern sie in beiden Knoten nichtdegeneriert ist. Es gibt folgende Prioritäten:

Priorität 1: Wähle eine nicht auf einem Dreieck des Typs 0 liegende Kante $e = [v_i, v_j] \in E(\Delta)$, falls für beiden Knoten $v_i, v_j \in V_{in}(\Delta)$ noch kein Pfad gewählt wurde und e in beiden Knoten nichtdegeneriert ist. Markiere e als doppelten Pfad für v_i und v_j .

Priorität 2: Wähle eine nicht auf einem Dreieck des Typs 0 liegende Kante $e = [v_i, v_j] \in E(\Delta)$, $v_j \notin V_{in}(\Delta)$, falls für $v_i \in V_{in}(\Delta)$ noch kein Pfad gewählt wurde und e in v_i nichtdegeneriert ist. Markiere e als einfachen Pfad für v_i .

Priorität 3: Wähle eine nicht auf einem Dreieck des Typs 0 liegende Kante $e = [v_i, v_j] \in E(\Delta)$, $v_j \in V_{in}(\Delta)$, falls für $v_i \in V_{in}$ noch kein Pfad gewählt wurde, und e in v_i nichtdegeneriert ist. Markiere e als einfachen Pfad für v_i .

Wir legen so oft wie möglich Pfade nach Priorität 1 fest. Danach wählen wir Kanten so oft wie möglich nach Priorität 2. Für alle verbleibenden unmarkierten Knoten in V_{in} wählen wir zuletzt Pfade nach Priorität 3. Dabei beachten wir, dass folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- Es entstehen keine Pfade, die eine Gesamtlänge ≥ 3 besitzen (vgl. Abbildung 4).
- Für zwei benachbarte Knoten $v_1, v_2 \in V(\Delta)$, die nicht Eckpunkt eines Dreiecks vom Typ 0 sind, ist in mindestens einem Dreieck $T = \Delta(v_1, v_2, v_j) \in \Delta$ keine Kante von T ein Pfad (vgl. Abbildung 5).

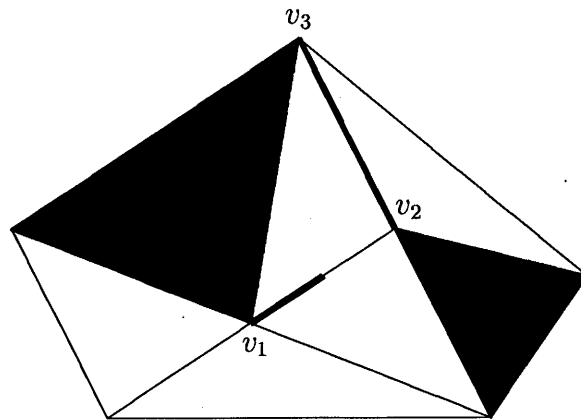


Abb. 4: Konstellation mit Pfad der Länge 2.

Bemerkung 3.1:

- Abbildung 5 zeigt eine Konstellation, bei der es nicht möglich Pfade so zu wählen, dass Bedingung b) erfüllt ist. In diesem Fall führen wir lokal eine neue Zuordnung von Typ 0 durch. Da zwei neue unmarkierte Knoten entstehen ist es eventuell notwendig, einem weiteren Dreieck von Δ Typ 0 zuzuordnen.

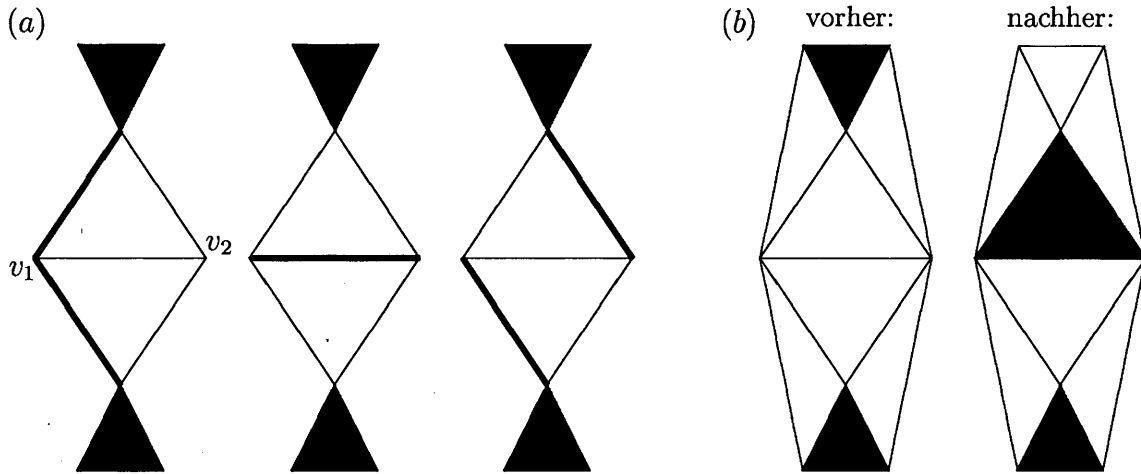


Abb. 5: (a) zu vermeidende Pfadkonstellationen; (b) lokale Modifikation.

- Bei der Zuordnung von Typ 1 darf nach Bedingung b) keine Kante des Dreiecks ein Pfad sein. Wird dagegen Typ 2 zugeordnet, so muss nach Schritt 3 nur der Pfad des entsprechenden unmarkierten Knotens (falls existent) außerhalb des Dreiecks liegen. Wegen $\text{Grad}(v) \geq 3$ für alle $v \in V_{in}(\Delta)$ gibt es stets eine geeignete Wahl eines solchen Dreiecks in Δ_v .

Sei Δ eine beliebige Triangulierung. Dann formulieren wir nun den Algorithmus zur Zuordnung der Dreieckstypen und zur Festlegung der Pfade.

Algorithmus 3.2:

Führe so oft wie möglich Schritt 1 durch. Dann definiere unter Verwendung der Prioritäten die Pfade der Triangulierung. Im Anschluss führe so oft wie möglich Schritt 2 durch. Für die verbleibenden unmarkierten Knoten der Triangulierung führe Schritt 3 durch. Danach führe stets den niedrigst möglichen Schritt i , $i = 4, \dots, 7$ durch, bis alle Dreiecke der Triangulierung einen Typ besitzen.

4. Lokale Lagrangeinterpolation

Sei $q \geq 5$ und Δ eine beliebige Triangulierung. Unter Verwendung der festgelegten Pfade und der Unterteilung der Triangulierung in verschiedene Dreieckstypen konstruieren wir nun Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$. Sei $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$ für alle $T \in \Delta$, dann wählen wir folgende Interpolationspunkte (vgl. Abbildung 7):

- 1.) Wähle $\binom{q+2}{2}$ Punkte auf T zur eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_q , falls T vom Typ 0.
- 2.) Wähle v_2, v_3 , 2 Punkte auf $[v_2, v_3]$, je einen Punkt auf $[v_3, v_1]$ und $[v_2, v_1]$, $q-3$ Punkte jeweils auf $[v_1, \frac{v_2+v_3}{2}]$ und $[v_2, \frac{v_1+v_3}{2}]$, $q-4$ Punkte auf $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$ und für $q \geq 6$ genau

0	6	3	0	6	3	0	6	3	0	4
4	0	5	3	5	0	5	3	5	0	6
5	4	6	3	6	4	6	3	6	4	6
0	4	6	4	0	4	6	4	0	4	6
5	0	6	3	6	0	6	3	6	0	6
5	4	6	3	6	4	6	3	6	4	6
0	5	4	0	5	2	5	0	5	2	5

0	5	3	6	3	5	6	0	6	3	5	2	6	0	6	3	5	1
6	0	5	3	6	0	5	3	6	0	5	3	6	0	5	3	6	0
5	3	6	0	5	3	6	0	5	3	6	0	5	3	6	0	5	3
5	2	5	6	0	6	3	6	0	6	4	0	5	4	0	6	4	0
6	3	6	4	0	6	2	5	6	2	5	4	2	5	3	4	6	1
0	6	3	6	0	6	2	5	6	2	5	4	2	5	3	4	6	1
5	3	6	4	0	6	3	6	0	6	3	0	6	4	0	5	3	6
5	2	5	6	0	6	3	6	0	6	3	0	6	4	0	5	3	6
0	6	3	6	0	6	2	5	6	2	5	4	2	5	3	4	6	1
0	5	3	6	0	6	2	5	6	2	5	4	2	5	3	4	6	1

Abb. 6: Typzuordnung der Dreiecke von Δ^1 und Δ^2 .

$\binom{q-4}{2}$ Punkte im Innern von T , auf keiner dieser Strecken, zur eindeutigen Interpolation mit \mathcal{P}_{q-6} , falls T vom Typ 1, v_1 Eckpunkt eines Dreiecks vom Typ 0.

- 3.) Seien T vom Typ 2, v_1, v_2 Eckpunkte von Dreiecken des Typs ≤ 1 . Für v_3 bezeichnen wir mit e_1, \dots, e_j , $j \geq 2$ zuerst die unmarkierten Kanten, dann die Pfade der Triangulierung, die v_3 mit einem Eckpunkt eines Dreiecks des Typs ≤ 1 verbinden, und paarweise verschiedene Steigungen besitzen. Dann wähle v_3 und je einen Punkt auf e_1 und e_2 (vgl. Abbildung 13). Ferner unterscheiden wir zwei Fälle:

Typ 2a: Das Nachbardreieck mit gemeinsamer Kante $[v_1, v_2]$ ist vom Typ ≤ 2 . Dann wähle $\binom{q-2}{2}$ Punkte im Innern von T zur eindeutigen Interpolation mit \mathcal{P}_{q-4} ,

Typ 2b: Das Nachbardreieck mit gemeinsamer Kante $[v_1, v_2]$ ist vom Typ ≥ 3 . Dann wähle $q-3$ Punkte auf $[v_1, \frac{v_2+v_3}{2}]$, $q-4$ Punkte jeweils auf $[v_2, \frac{v_1+v_3}{2}]$ und $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$ und für $q \geq 6$ genau $\binom{q-4}{2}$ Punkte im Innern von T , auf keiner dieser Strecken, zur eindeutigen Interpolation mit \mathcal{P}_{q-6} .

- 4.) Wähle $q-3$ Punkte auf $[v_1, \frac{v_2+v_3}{2}]$, $q-4$ Punkte auf $[v_2, \frac{v_1+v_3}{2}]$, $q-5$ Punkte auf $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$ und für $q \geq 6$ genau $\binom{q-4}{2}$ Punkte im Innern von T auf keiner dieser Strecken, zur eindeutigen Interpolation mit \mathcal{P}_{q-6} , falls T vom Typ 3 ist.

- 5.) Wähle $q-4$ Punkte auf $[v_1, \frac{v_2+v_3}{2}]$ und $\binom{q-3}{2}$ Punkte im Innern von T , nicht auf dieser Strecke, zur eindeutigen Interpolation mit \mathcal{P}_{q-5} , falls T vom Typ 4 und $[v_2, v_3]$ die Kante zum benachbarten Dreieck vom Typ ≤ 3 ist.

- 6.) Wähle $\binom{q-3}{2}$ Punkte im Innern von T zur eindeutigen Interpolation mit \mathcal{P}_{q-5} , falls T vom Typ 5 ist.

- 7.) Wähle für $q \geq 6$ genau $\binom{q-4}{2}$ Punkte im Innern von T zur eindeutigen Interpolation mit \mathcal{P}_{q-6} , falls T vom Typ 6 ist.

- 8.) Wähle $q-3$ Punkte im Innern jeder Kante in $E(\Delta)$, die kein Pfad ist, und die nicht auf einem Dreieck des Typs 0 liegt, $q-4$ Punkte im Innern jeder Kante in $E(\Delta)$, die ein einfacher Pfad ist, und $q-5$ Punkte im Inneren jeder Kante in $E(\Delta)$, die ein doppelter Pfad ist.

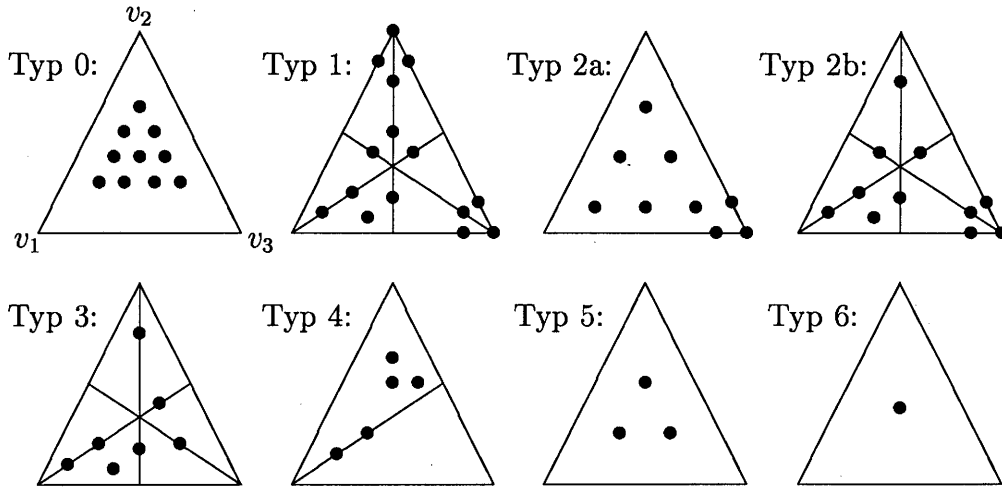


Abb. 7: Mögliche Punkte für Dreiecke von Typ 0 bis Typ 6 im Fall $q = 6$.

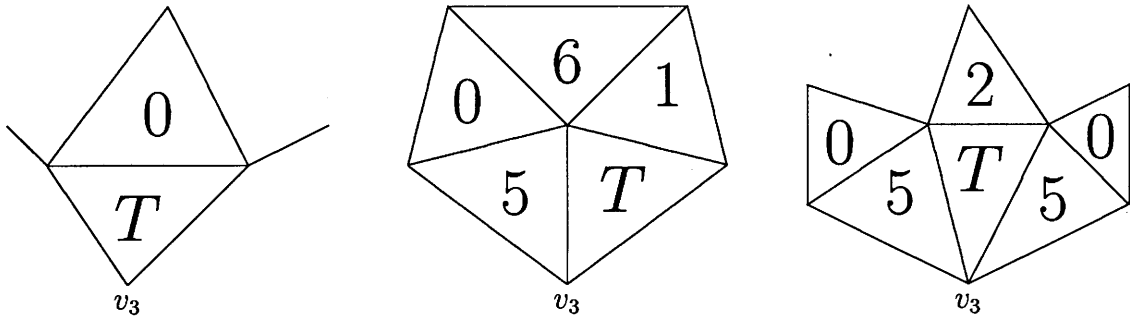


Abb. 8: Dreiecke T vom Typ 2a.

Wir beweisen zunächst ein Lemma für einzelne Zellen der Triangulierung. Sei dazu $v \in V(\Delta)$ mit $\text{Grad}(v) = n \in \mathbb{N}$ im Uhrzeigersinn verbunden mit Knoten v_i , $i = 1, \dots, n$ durch Kanten $e_i = [v, v_i]$, d_i für $i = 1, \dots, n$ einen Einheitsvektor entlang e_i und $\Delta_v = \{T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1}), i = 1, \dots, n\}$, $v_{n+1} = v_1$ die Zelle von v . Für einen Randknoten ent falle das Dreieck T_n . Falls v ein innerer nichtsingulärer Knoten ist, so sei e_r , $r \geq 3$ der Pfad von v . Ferner sei $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$ gegeben durch $s|_{T_i} \equiv p^{[T_i]} \in \mathcal{P}_q$, $i = 1, \dots, n$.

Lemma 4.1:

Aus $p^{[T_1]} \equiv 0$ und $s|_{e_j} \equiv 0$, $j = 3, \dots, n$, $j \neq r$ folgt $D^w p^{[T_i]}(v) \equiv 0$, $i = 1, \dots, n$, $w = 0, \dots, 2$.

Beweis:

$s|_{T_1} \equiv 0$ und die C^1 -Stetigkeit im Knoten v implizieren nach Lemma 2.4 $D^w s(v) \equiv 0$, $w = 0, 1$ sowie $p_{d_1^2}^{[T_1]}(v) = p_{d_1 d_2}^{[T_1]}(v) = p_{d_1 d_2^2}^{[T_1]}(v) = 0$. Wir unterscheiden folgende Fälle:

Fall 1: $v \in V_{in}$;

Wegen $s|_{e_j} \equiv 0$, $j = 1, \dots, n$, $j \neq r$ gilt insbesondere $s_{d_j^2}(v) = 0$, $j = 1, \dots, n$, $j \neq r$. Mit der C^1 -Stetigkeit über den Kanten e_j , $j = 1, \dots, n$, $j \neq r$ folgt daher nach Lemma 2.4, dass $s_{d_j d_{j+1}}(v) = 0$ für $j = 1, \dots, n$. Da e_r in v nichtdegeneriert ist, impliziert $s_{d_{r-1} d_r}(v) =$

$s_{d_r d_{r+1}}(v) = 0$ und die C^1 -Stetigkeit über der Kante e_r nach Lemma 2.4 auch $s_{d_r^2}(v) = 0$. Insgesamt gilt $D^w p^{[T_i]}(v) \equiv 0, i = 1, \dots, n, w = 0, \dots, 2$.

Fall 2: v ist singulär;

Wegen $s|_{e_j} \equiv 0, j = 1, \dots, 4$ gilt insbesondere $s_{d_j^2}(v) = 0, j = 1, \dots, 4$. Nach Lemma 2.4 folgt aus der C^1 -Stetigkeit über den Kanten $e_j, j = 1, \dots, 4$ daher $s_{d_j d_{j+1}}(v) = 0, j = 1, \dots, 4$. Dies impliziert $D^w p^{[T_i]}(v) \equiv 0, i = 1, \dots, 4, w = 0, \dots, 2$.

Fall 3: $v \in V_B(\Delta)$;

Wegen $s|_{e_j} \equiv 0, j = 1, \dots, n$ gilt insbesondere $s_{d_j^2}(v) = 0, j = 1, \dots, n$. Die C^1 -Stetigkeit über den Kanten $e_j, j = 1, \dots, n$ liefert nach Lemma 2.4 $s_{d_j d_{j+1}}(v) = 0$ für $j = 1, \dots, n-1$, und damit $D^w p^{[T_i]}(v) \equiv 0, i = 1, \dots, n, w = 0, \dots, 2$.

#

Sei $q \geq 5$ und Δ eine beliebige Triangulierung. Mit L_q bezeichnen wir die Menge aller oben gewählter Interpolationspunkte auf Ω .

Theorem 4.2:

L_q ist eine Lagrangeinterpolationsmenge für $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$.

Beweis:

In der Menge L sind nach Konstruktion enthalten:

- 3 Punkte für jeden Knoten in $V(\Delta)$,
- $q - 3$ Punkte auf jeder Kante in $E(\Delta)$ (einige davon im Inneren eines Dreiecks vom Typ 0),
- 1 zusätzlicher Punkt für jeden singulären Knoten und jeden Randknoten,
- $\binom{q-4}{2}$ Punkte im Innern jeden Dreiecks in Δ , und
- $q - 4$ Punkte im Innern eines anliegenden Dreiecks, für jede Kante in $E(\Delta)$.

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \#L_q &= 3 \#V(\Delta) + (2q - 7) \#E(\Delta) + \#V_B(\Delta) + \sigma + \binom{q-4}{2} \#N(\Delta) \\ &= \left[\binom{q-4}{2} + 4q - 10 \right] \#E_I(\Delta) - \left[\binom{q-4}{2} + 6q - 12 \right] \#V_I(\Delta) + \left[\binom{q-4}{2} + 6q - 9 \right] + \sigma \\ &= \binom{q+2}{2} + \binom{q}{2} \#E_I(\Delta) - \left[\binom{q+2}{2} - \binom{3}{2} \right] \#V_I(\Delta) + \sigma \\ &= \dim(\mathcal{S}_q^1(\Delta)). \end{aligned}$$

Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta)$ gegeben durch $p^{[T]} = s|_T \in \mathcal{P}_q$ für alle $T \in \Delta$, und es gelte $s(z) = 0$ für alle $z \in L_q$.

Sei $e := [u, v] \in E(\Delta)$ eine Kante der Triangulierung, die nicht auf einem Dreieck des

Typs 0 liegt. Ist e kein Pfad, so folgt aus $D^w s(u) \equiv D^w s(v) \equiv 0$ für $w = 0, 1$ und den Interpolationsbedingungen im Innern von e , dass $s|_e \equiv 0$. Gleiches gilt, falls e ein einfacher bzw. doppelter Pfad ist, und zusätzlich $D^2 p^{[T]}(u) \equiv 0$ bzw. $D^2 p^{[T]}(u) \equiv D^2 p^{[T]}(v) \equiv 0$ gilt. Für drei Knoten $v_1, v_2, v_3 \in V(\Delta)$, die durch den Pfad $e_{1,2} := [v_1, v_2]$ von v_1 und den Pfad $e_{2,3} := [v_2, v_3]$ von v_2 und v_3 verbunden sind, bestimmen wir $D^w p^{[T]}(v_i)$, $w = 0, \dots, 2$ zuerst für v_1 , dann für v_2 und zuletzt für v_3 .

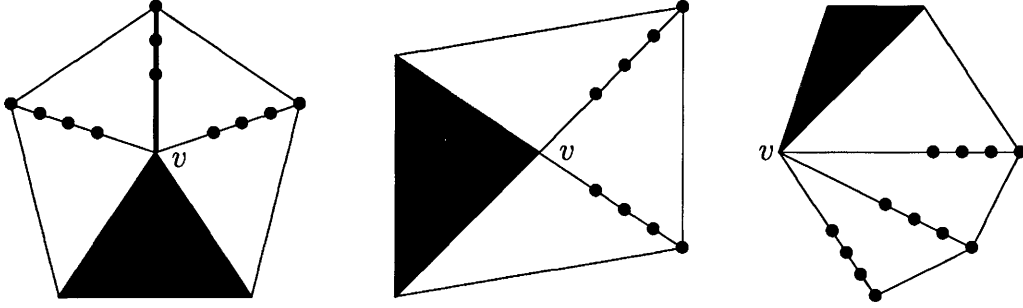


Abb. 9: Lagrangepunkte verschiedener Zellen für $q = 5$.

Wir zeigen nun, dass $s|_T \equiv 0$ für alle $T \in \Delta$. Dabei unterscheiden wir nach dem Typ des Dreiecks $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$.

Fall 1: T ist vom Typ 0;

Die Anzahl der Interpolationsbedingungen auf T entspricht der Dimension von \mathcal{P}_q . Da nach Voraussetzung eindeutige Interpolation möglich ist, gilt $s|_T \equiv 0$.

Fall 2: T ist vom Typ 1;

Nach Lemma 4.1 gilt $D^w p^{[T]}(v_1) = 0$ für $w = 0, \dots, 2$ und alle Dreiecke T mit Eckpunkt v_1 . Da keine der drei Kanten e_i , $i = 1, \dots, 3$ von T ein Pfad ist, implizieren die Interpolationsbedingungen auf diesen Kanten $s|_{e_i} \equiv 0$, $i = 1, \dots, 3$. Wegen den Interpolationsbedingungen auf den Strecken $[v_j, \frac{v_{j+1}+v_{j+2}}{2}]$, $j = 1, \dots, 3$, gibt es folglich ein Polynom $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-6}$, sodass sich $p^{[T]}$ schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot l_4 \cdot l_5 \cdot l_6 \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei l_j für $j = 1, \dots, 3$ eine Gerade durch $[v_j, v_{j+1}]$ und l_j für $j = 4, \dots, 6$ eine Gerade durch $[v_{j-3}, \frac{v_{j-2}+v_{j-1}}{2}]$ ist. Die verbleibenden $\binom{q-4}{2}$ Interpolationsbedingungen im Innern von T implizieren $q^{[T]} \equiv 0$ und damit $p^{[T]} \equiv 0$.

Fall 3: T ist vom Typ 2a;

Die Interpolationsbedingungen auf den Kanten e_i , $i = 1, \dots, 3$ von T implizieren $s|_{e_i} \equiv 0$, $i = 1, \dots, 3$. Wegen der C^1 -Stetigkeit über der Kante $[v_1, v_2]$ gibt es daher ein Polynom $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-6}$, sodass sich $p^{[T]}$ schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1^2 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei l_j für $j = 1, \dots, 3$ eine Gerade durch $[v_j, v_{j+1}]$ ist. Die verbleibenden $\binom{q-2}{2}$ Interpolationsbedingungen im Innern von T implizieren $q^{[T]} \equiv 0$ und damit $p^{[T]} \equiv 0$.

Fall 4: T ist vom Typ 2b;

Nach Lemma 4.1 folgt $D^w p^{[T]}(v_i) = 0$ für $i = 1, 2$, $w = 0, \dots, 2$, und alle Dreiecke T mit Eckpunkt v_1 bzw v_2 . Daraus folgt mit den Interpolationsbedingungen auf den Kanten e_i , $i = 1, \dots, 3$ von T , dass $s|_{e_i} \equiv 0$, $i = 1, \dots, 3$. Mit den Interpolationsbedingungen im Innern der Strecken $[v_j, \frac{v_{j+1}+v_{j+2}}{2}]$, $j = 1, \dots, 3$, gibt es daher ein Polynom $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-6}$, sodass sich $p^{[T]}$ schreiben läßt als

$$p^{[T]}(z) = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot l_4 \cdot l_5 \cdot l_6 \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei l_j für $j = 1, \dots, 3$ eine Gerade durch $[v_j, v_{j+1}]$ und l_j für $j = 4, \dots, 6$ eine Gerade durch $[v_{j-3}, \frac{v_{j-2}+v_{j-1}}{2}]$ ist. Die verbleibenden $\binom{q-5}{2}$ Interpolationsbedingungen im Innern von T implizieren $q^{[T]} \equiv 0$ und damit $p^{[T]} \equiv 0$.

Fall 5: T ist vom Typ 3;

Mit den Interpolationsbedingungen auf den verbleibenden Kanten $e \in E(\Delta)$ folgt $s|_e \equiv 0$ für alle $e \in E(\Delta)$. Somit implizieren die Interpolationsbedingungen auf den Strecken $[v_j, \frac{v_{j+1}+v_{j+2}}{2}]$, $j = 1, \dots, 3$, die Existenz eines Polynoms $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-5}$, sodass sich $p^{[T]}$ schreiben läßt als

$$p^{[T]}(z) = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot l_4 \cdot l_5 \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei l_j , $j = 1, \dots, 3$ Geraden durch $[v_j, v_{j+1}]$ und l_j , $j = 4, 5$ Geraden durch $[v_{j-3}, \frac{v_{j-2}+v_{j-1}}{2}]$ sind. Für $q = 5$ impliziert $D^w p^{[T]}(v_3) \equiv 0$, $w = 0, \dots, 2$, dass $q^{[T]}(v_3) = 0$ und damit $p^{[T]} \equiv 0$. Für $q \geq 6$ gibt es mit den Interpolationsbedingungen auf der Strecke $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$ ein Polynom $\tilde{q}^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-6}$, sodass sich $p^{[T]}$ schreiben läßt als

$$p^{[T]}(z) = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot l_4 \cdot l_5 \cdot l_6 \cdot \tilde{q}^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei l_6 eine Gerade durch $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$ ist. Aus den verbleibenden $\binom{q-4}{2}$ Interpolationsbedingungen im Innern von T folgt $\tilde{q}^{[T]} \equiv 0$ und damit $p^{[T]} \equiv 0$.

Fall 6: T ist vom Typ 4;

Wegen $s|_e \equiv 0$ für alle $e \in E(\Delta)$, der C^1 -Stetigkeit über der Kante $[v_1, v_2]$ und der Interpolationsbedingungen im Innern der Strecke $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$ gibt es ein Polynom $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-5}$, sodass sich $p^{[T]}$ schreiben läßt als

$$p^{[T]}(z) = l_1^2 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot l_4 \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei l_j , $j = 1, \dots, 3$ Geraden durch $[v_j, v_{j+1}]$ sind, und l_4 eine Gerade durch $[v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$ ist. Die $\binom{q-3}{2}$ Interpolationsbedingungen im Innern von T liefern $q^{[T]} \equiv 0$ und damit $p^{[T]} \equiv 0$.

Fall 7: T ist vom Typ 5;

Wegen $s|_e \equiv 0$ für alle $e \in E(\Delta)$ und der C^1 -Stetigkeit über den Kanten $[v_1, v_2]$ und $[v_2, v_3]$ existiert ein Polynom $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-5}$, sodass sich $p^{[T]}$ schreiben läßt als

$$p^{[T]}(z) = l_1^2 \cdot l_2^2 \cdot l_3 \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei l_j für $j = 1, \dots, 3$ eine Gerade durch $[v_j, v_{j+1}]$ ist. Die $\binom{q-3}{2}$ Interpolationsbedingungen im Innern von T implizieren $q^{[T]} \equiv 0$ und somit $p^{[T]} \equiv 0$.

Fall 8: T ist vom Typ 6;

Mit $s|_e \equiv 0$ für alle $e \in E(\Delta)$ und der C^1 -Stetigkeit über den drei Kanten von T ist für $q = 5$ das Polynom $p^{[T]} \equiv 0$. Für $q \geq 6$ gibt es ein Polynom $q^{[T]} \in \mathcal{P}_{q-6}$, sodass sich $p^{[T]}$ schreiben lässt als

$$p^{[T]}(z) = l_1^2 \cdot l_2^2 \cdot l_3^2 \cdot q^{[T]}(z), \quad z \in T,$$

wobei l_j , $j = 1, \dots, 3$ Geraden durch die Kanten $[v_j, v_{j+1}]$ sind. Die $\binom{q-4}{2}$ Interpolationsbedingungen im Innern von T implizieren $q^{[T]} \equiv 0$ und damit $p^{[T]} \equiv 0$.

Insgesamt gilt $p^{[T]} \equiv 0$ für alle $T \in \Delta$, also $s \equiv 0$.

#

Wir formulieren nun die zentrale Aussage über die Trägergröße der dualen Basissplines. Sei $q \geq 5$, $d_q = \dim(\mathcal{S}_q^1(\Delta))$ und $\{s_i, i = 1, \dots, d_q\}$ die duale Basis von $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$ bzgl. einer obigen Lagrange-Interpolationsmenge L .

Theorem 4.3:

Für jedes $i \in \{1, \dots, d_q\}$ existiert ein Knoten $v \in V(\Delta)$ mit

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{star}^7(v).$$

Beweis:

Für $z_i \in L_q \subset \Omega$ sei $s \equiv s_i$ gegeben durch $p^{[T]} \equiv s|_T \in \mathcal{P}_q$ für alle $T \in \Delta$. Ferner sei $e_{j,k} := [v_j, v_k] \in E(\Delta)$. Dann unterscheiden wir folgende Fälle:

Fall 1: z_i liegt im Innern eines Dreiecks T vom Typ ≥ 3 ;

Dann gilt $D^w p^{[T]}(v) \equiv 0$ für $w = 0, \dots, 2$ und alle Eckpunkte v von T , da alle Funktionswerte sowie 1. und 2. Ableitungen in den Knoten von Δ Null bestimmt sind. Zudem können zwei benachbarte Dreiecke T_1 und T_2 nicht vom selben Typ ≥ 3 sein, denn:

- 1.) Ist T_1 vom Typ 3, so kann T_2 niedrigstenfalls vom Typ 4 sein.
- 2.) Sind beide Dreiecke vom Typ 4 oder vom Typ 5, und wurde o.B.d.A. zuerst dem Dreieck T_1 ein Typ zugeordnet, so wäre bei umgekehrter Reihenfolge der Typzuordnung T_2 vom Typ 3 bzw 4 und T_1 vom Typ 5 bzw. 6.
- 3.) Ist T_1 vom Typ 6, so kann T_2 höchstensfalls vom Typ 5 sein.

Ist T vom Typ 3, so folgt aus $z_i \in T$, dass $p^{[T]} \not\equiv 0$. Mit der C^1 -Stetigkeit über den Kanten von T gilt $p^{[T_{1,j}]} \not\equiv 0$ für alle benachbarten Dreiecke $T_{1,j}$ von T . Ist $T_{1,j}$ ein Dreieck vom Typ 4, so gilt wiederum $p^{[T_{2,k}]} \not\equiv 0$ für alle benachbarten Dreiecke $T_{2,k}$ von $T_{1,j}$ von höherem Typ. Ist $T_{2,k}$ ein Dreieck vom Typ 5, so gilt $p^{[T_3]} \not\equiv 0$ für das benachbarte Dreieck $T_{3,k}$ von $T_{2,k}$ vom Typ 6. Für alle anderen Dreiecke $T \in \Delta$ gilt $p^{[T]} \equiv 0$ (vgl. Abbildung 10). Dies impliziert für einen Eckpunkt v von T

$$\text{supp}(s_i) \subset \text{st}^3(v).$$

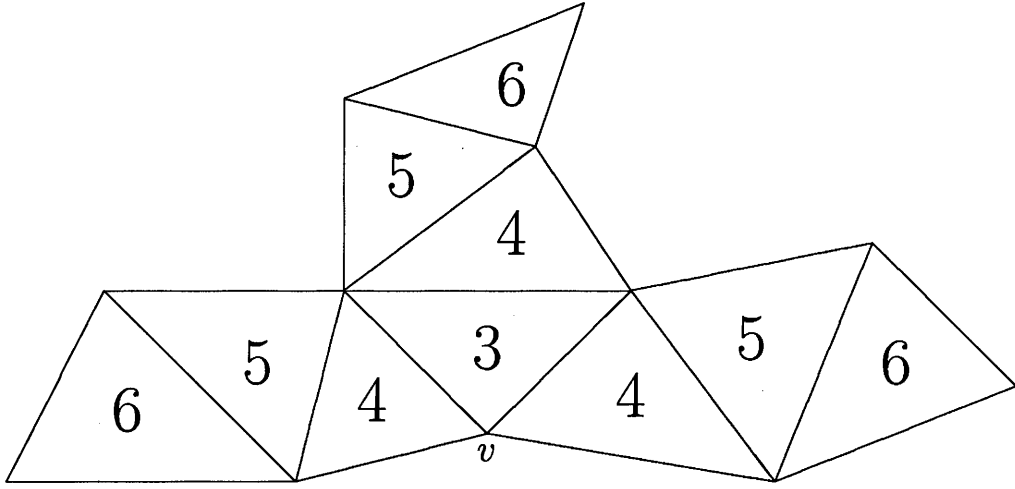


Abb. 10: Dreiecksketten in Theorem 4.3, Fall 1.

Fall 2: z_i liegt auf einem Dreieck T vom Typ 0;

Dann gilt $p^{[T]} \neq 0$ und daher $D^w s(v_1) \neq 0$, $w = 0, 1$ für einen Eckpunkt v_1 von T .

Fall 2.1: Ein anhängendes Dreieck T_1 ist vom Typ 1;

Dann kann für einen Eckpunkt v_2 von T_1 der Spline $s|_{e_{1,2}} \neq 0$ sein. Nach Konstruktion kann kein weiteres Dreieck vom Typ 1 an T_1 anhängen, jedoch ein Dreieck T_2 vom Typ 2. In diesem Fall kann für einen Eckpunkt v_3 von T_2 der Spline $s|_{e_{2,3}} \neq 0$ sein. Nach Konstruktion existiert kein weiteres Dreieck mit Eckpunkt v_3 vom Typ 1 oder vom Typ 2. Für einen Pfad $e_{3,4}$ von v_3 ist $s|_{e_{3,4}} \neq 0$ möglich. Gibt es einen weiteren Pfad $e_{4,5}$ von v_4 zu einem Knoten v_5 , so gilt eventuell $D^2 p^{[T]} s(v_4) \neq 0$ für ein Dreieck T mit Eckpunkt v_4 . Da die maximale Länge der Pfade 2 beträgt, ist keine weitere Kante mit Endpunkt v_5 ein Pfad. Aus $s|_T \neq 0$ für $T = \Delta(v_4, v_5, w) \in \Delta$ kann wie in Fall 1 der Spline s noch auf einer Kette von maximal drei Dreiecken verschieden von Null sein (vgl. Abbildung 10).

Da dies für alle drei Eckpunkte von T möglich ist, gilt für einen Eckpunkt v von T

$$\text{supp}(s_i) \subset st^7(v).$$

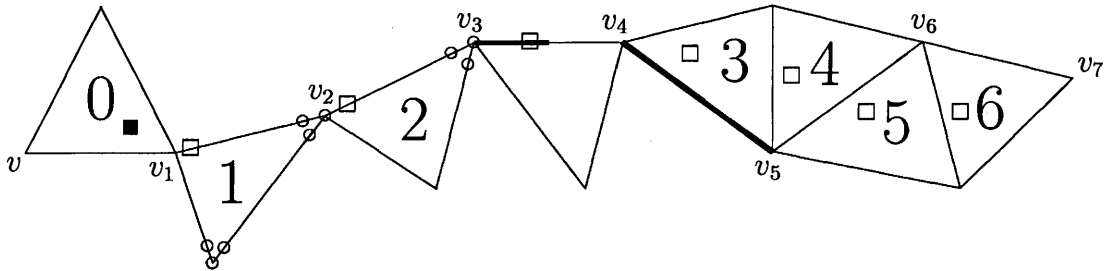


Abb. 11: Punkte in Fall 2.1: ■ z_i , ○ Null gegeben, □ evtl. ungleich Null berechnet.

Fall 2.2: Ein anhängendes Dreieck T_1 ist vom Typ 2;

Nach Konstruktion existiert kein benachbartes Dreieck von T_1 mit Typ 2. Für einen Eckpunkt v_2 von T_1 ist $s|_{e_{1,2}} \neq 0$ möglich. Wegen $D^w s(v_2) \neq 0$ für $w = 0, 1$ kann für einen

benachbarten Eckpunkt v_3 eines Dreiecks vom Typ 0 daher $s_{|e_{2,3}} \neq 0$ gelten. Ist $e_{3,4}$ der Pfad von v_3 , so impliziert dies $D^2 p^{[T]}(v_4) \neq 0$ für ein Dreieck T mit Eckpunkt v_4 . Der Rest des Beweises verläuft analog Fall 2.1. Für einen Eckpunkt v von T impliziert dies (vgl. Abbildung 12)

$$\text{supp}(s_i) \subset st^7(v).$$

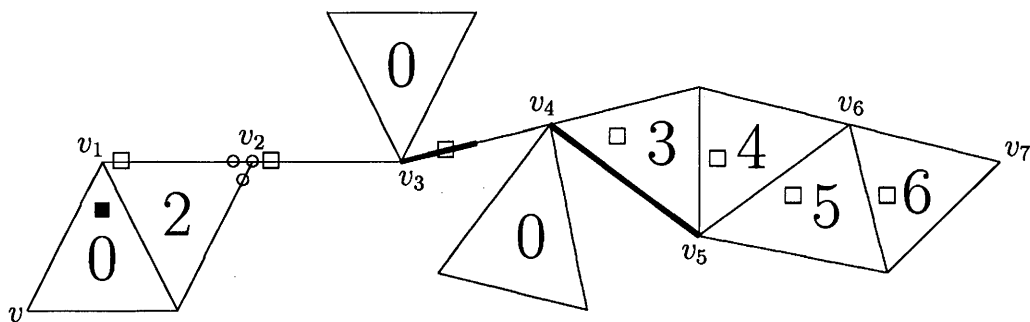


Abb. 12: Punkte in Fall 2.2: ■ z_i , ○ Null gegeben, □ evtl. ungleich Null berechnet.

Fall 3: z_i liegt auf einem Dreieck T vom Typ 1 oder Typ 2;
Dann gilt für $j = 1, 2$ mit analogem Argument wie in Fall 2.1

$$\text{supp}(s_i) \subset st^{7-j}(v)$$

für einen Eckpunkt v von T , falls T vom Typ j ist.

#

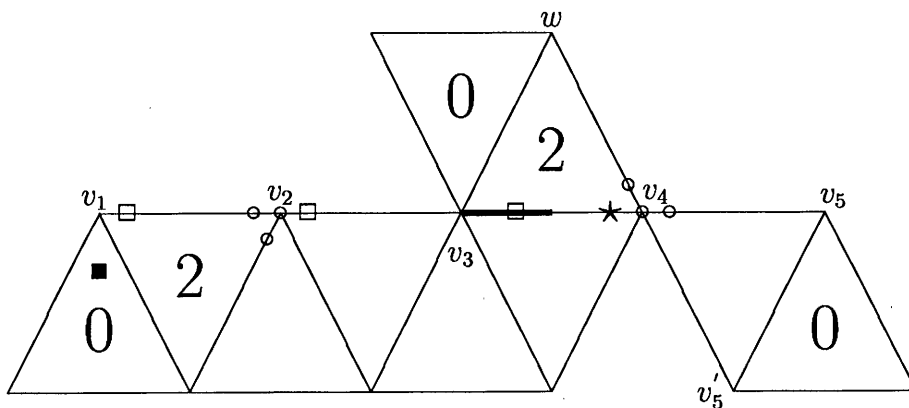


Abb. 13: Nach 3.) gewählte Punkte für v_4 .

Bemerkung 4.4:

- Abbildung 13 zeigt ein Beispiel, in dem ein Interpolationspunkt für den Eckpunkt eines Dreiecks $T = \Delta(w, v_3, v_4)$ vom Typ 2 außerhalb von T gewählt ist. Es wird kein Punkt \star im Innern von $[v_3, v_4]$ gesetzt, da diese Kante ein Pfad ist. Der Interpolationspunkt im Innern von $[v_4, v_5]$ impliziert $s_{|[v_4, v_5]} \neq 0$.

- Bei der Berechnung des interpolierenden Splines s spielen die dualen Basisfunktionen keine Rolle, da s durch schrittweise Lösung kleiner Gleichungssysteme bestimmt wird. Aus $\text{supp}(s_i) \subset st^7(v)$ folgt nicht, dass s_i auf allen Dreiecken von $st^7(v)$ verschieden von Null ist. Vielmehr ist es so, dass s_i nur auf kleinen Bereichen von $st^7(v)$ Funktionswerte ungleich Null annimmt.
- Mögliche zugeordnete Dreieckstypen und Pfade für eine exemplarische Triangulierung sind in Abbildung 14 zu sehen.

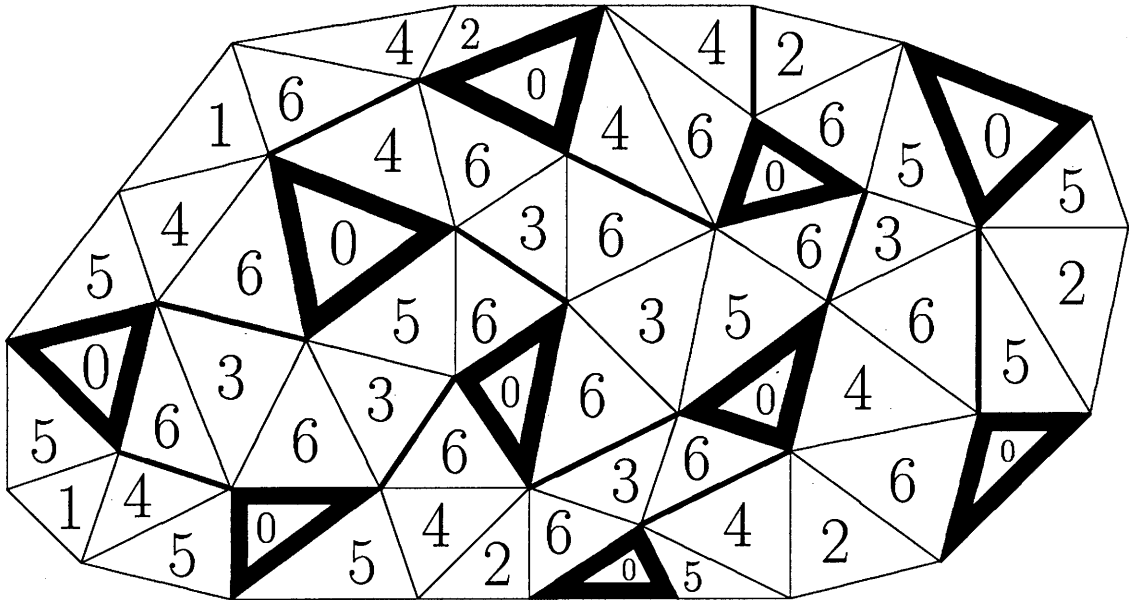


Abb. 14: Exemplarische Triangulierung mit möglichen Dreieckstypen und Pfaden.

5. Approximationsordnung

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Approximationsgüte dieser Interpolationsmethode mit dem Spliner Raum $\mathcal{S}_q^1(\Delta)$, $q \geq 5$. Dazu benutzen wir die von Nürnberger [26] (s.a. Nürnberger und Walz [28], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [12,15] und Nürnberger und Zeilfelder [31]) entwickelte Technik der schwachen Interpolation. Sei $h = \text{diam}(\Delta)$, α der kleinste Winkel der Triangulierung, und β der am nächsten an π liegende Winkel von einerseits den Summen der beiden anliegenden Winkel aller Pfade, und andererseits der zwischen e_1 und e_2 liegende Winkel, für jeden Knoten v_3 eines Dreiecks vom Typ 2.

Wir zeigen zunächst für beliebiges $q \geq 5$ Abschätzungen des Interpolanten im C^1 - bzw. C^2 -Bereich der Knoten, sowie auf den Kanten der Triangulierung.

Sei $q \geq 5$, $f \in C^{q+1}(\Omega)$, $h = \text{diam}(\Delta)$ und $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta)$ mit $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_q$ für alle Dreiecke $T \in \Delta$ das eindeutige Interpolationspolynom an f bzgl. einer obigen Menge

L. Für $v \in V(\Delta)$ mit $\text{Grad}(v) = n$ sei v im Uhrzeigersinn verbunden mit den Knoten v_i , $i = 1, \dots, n$ durch Kanten $e_i = [v, v_i]$. Ferner sei d_i für $i = 1, \dots, n$ ein Einheitsvektor entlang der Kante e_i und $\Delta_v = \{T_i = \Delta(v, v_i, v_{i+1}), i = 1, \dots, n\}$, $v_{n+1} = v_1$ die Zelle um v . Für einen Randknoten entfalle das Dreieck T_n . d_i und d_j seien linear unabhängig.

Lemma 5.1:

Existieren zwei (nur von q, f, α und β abhängige) Konstanten $C_i, C_j > 0$, sodass

$$|(f - s)_{d_i}(v)| \leq C_i \cdot h^q \quad \text{und} \quad |(f - s)_{d_j}(v)| \leq C_j \cdot h^q,$$

so gibt es eine (nur von q, f, α und β abhängige) Konstante $K > 0$ mit

$$\|D^1(f - s)(v)\| \leq K \cdot h^q.$$

Beweis:

Sei o.B.d.A. $d_i = d_1$. Für $1 < k < j$ bezeichne α_1 den von e_1 und e_k , bzw α_k den von e_k und e_j eingeschlossenen Winkel. (Der Fall $1 < j < k$ wird analog bewiesen.)

Dann gilt $\sin(\alpha_1 + \alpha_k)e_k = \sin(\alpha_k)e_1 + \sin(\alpha_1)e_j$ für $k = 2, \dots, n$, $k \neq j$ und damit

$$\begin{aligned} |(f - s)_{d_k}(v)| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} (f - s)_{d_j}(v) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_k)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} (f - s)_{d_1}(v) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} \right| C_j \cdot h^q + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} \right| C_1 \cdot h^q \leq C_k \cdot h^q, \end{aligned}$$

mit einer (nur von q, f, α und β abhängigen) Konstanten $C_k = \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_k)} \right| (C_1 + C_j) > 0$. Aus $K := \max\{C_l \mid l = 1, \dots, n\}$ folgt die Behauptung.

#

Lemma 5.2:

Existieren (nur von q, f, α und β abhängige) Konstanten $C_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, sodass

$$\left| (f - p^{[T_i]})_{d_i^2}(v) \right| \leq C_i \cdot h^{q-1},$$

(für jeden Knoten $v \in V_{in}$ entfalle die Ungleichung für $i = n$), sowie eine (nur von q, f, α und β abhängige) Konstante $C_{1,2} > 0$, für die gilt:

$$\left| (f - p^{[T_1]})_{d_1 d_2}(v) \right| \leq C_{1,2} \cdot h^{q-1},$$

so gibt es eine (nur von q, f, α und β abhängige) Konstante $K > 0$ mit

$$\|D^2(f - s)(v)\| \leq K \cdot h^{q-1}.$$

Beweis:

Sei α_i für $i = 1, \dots, n$ der von e_i und e_{i+1} eingeschlossene Winkel. Dann betrachten wir drei Fälle. Die Konstante K ergibt sich letztlich als Maximum aller auftretenden Konstanten.

Fall 1: $v \in V_I(\Delta)$ ist nicht singulär;
Falls e_3 in v degeneriert ist, so folgt

$$|(f - p^{[T_2]})_{d_2 d_3}(v)| = |-(f - p^{[T_1]})_{d_2 d_1}(v)| \leq C_{1,2} \cdot h^{q-1}.$$

Andernfalls folgt aus $\sin(\alpha_1)e_3 = \sin(\alpha_1 + \alpha_2)e_2 - \sin(\alpha_2)e_1$, dass

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T_2]})_{d_2 d_3}(v)| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} (f - p^{[T_1]})_{d_2^2}(v) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} (f - p^{[T_1]})_{d_2 d_1}(v) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \right| C_2 \cdot h^{q-1} + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \right| C_{1,2} \cdot h^{q-1} \leq C_{2,3} \cdot h^{q-1} \end{aligned}$$

mit einer (nur von q, f, α und β abhängigen) Konstanten $C_{2,3} = \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} \right| (C_2 + C_{1,2}) > 0$.
Mit analogem Argument existiert für $l = 3, \dots, n-1$ eine (nur von q, f, α und β abhängige) Konstante $C_{l,l+1} > 0$, sodass

$$|(f - p^{[T_l]})_{d_l d_{l+1}}(v)| \leq C_{l,l+1} \cdot h^{q-1}.$$

Letztlich gilt $\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)e_n = \sin(\alpha_n)e_{n-1} + \sin(\alpha_{n-1})e_1$, und damit

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T_n]})_{d_n^2}(v)| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_n)}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} (f - p^{[T_1]})_{d_{n-1} d_n}(v) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_{n-1})}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} (f - p^{[T_1]})_{d_n d_1}(v) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} \right| C_{n-1,n} \cdot h^{q-1} + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} \right| C_{n,1} \cdot h^{q-1} \leq C_n \cdot h^{q-1} \end{aligned}$$

mit einer (nur von q, f, α und β abhängigen) Konstanten $C_n = \left| \frac{1}{\sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} \right| (C_{n-1,n} + C_{n,1}) > 0$.

Fall 2: $v \in V_I(\Delta)$ ist singulär;

Da alle Kanten e_i , $i = 1, \dots, 4$ im Knoten v degeneriert sind, folgt

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T_2]})_{d_2 d_3}(v)| &= |-(f - p^{[T_3]})_{d_3 d_4}(v)| = |(f - p^{[T_4]})_{d_4 d_1}(v)| \\ &= |-(f - p^{[T_1]})_{d_1 d_2}(v)| \leq C_{1,2} \cdot h^{q-1}. \end{aligned}$$

Fall 3: $v \in V_B(\Delta)$;

Wie in Fall 1 folgt für $l = 2, \dots, n-1$ die Existenz einer (nur von f, α und β abhängigen) Konstanten $C_{l,l+1} > 0$, sodass

$$|(f - p^{[T_l]})_{d_l d_{l+1}}(v)| \leq C_{l,l+1} \cdot h^{q-1}.$$

#

Wir betrachten nun den univariaten Fall für eine Kante der Triangulierung. Sei $q \geq 5$, $e = [u, v]$ eine Kante der Länge h und $f \in C^{q+1}(e)$. Für $m \in \{2, \dots, q+1\}$ seien $z_1 = u, z_2 = v$ und z_3, \dots, z_m , falls $m \geq 3$, auf e gewählte Interpolationspunkte, d_1, d_2 Einheitsvektoren

von u nach v bzw. von v nach u , sowie $l_1, l_2 \in \{0, \dots, 2\}$ derart, dass $m + l_1 + l_2 = q + 1$. Ferner sei $p \in \mathcal{P}_q$ das eindeutige Interpolationspolynom an f bzgl. dieser Interpolationsmenge.

Lemma 5.3:

Existieren zwei (nur von q, f, α und β abhängige) Konstanten $C_1, C_2 > 0$, sodass

$$\left| (f - p)_{d_1^{k_1}}(u) \right| \leq C_1 \cdot h^{q+1-k_1} \quad \text{und} \quad \left| (f - p)_{d_2^{k_2}}(v) \right| \leq C_2 \cdot h^{q+1-k_2}$$

für $k_i = 0, \dots, l_i, i = 1, 2$, so gibt es eine Konstante $K_e > 0$ (nur abhängig von q, f, α und β), sodass für alle $w \in \{0, \dots, q\}$ und $i = 1, 2$ gilt

$$\| ((f - p)|_e)_{d_i^w} \| \leq K_e \cdot h^{q+1-w}.$$

Beweis:

Da $p \in \mathcal{P}_q$ die gegebene Funktion f interpoliert, gilt

$$(f - s)(z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Mit den gegebenen Ungleichungen in u und v sind daher die Voraussetzungen von Lemma 2.7 mit $\sigma = 5$ erfüllt. Es gibt also eine Konstante $K_e > 0$ (nur abhängig von q, f, α und β), sodass für $w \in \{0, \dots, 4\}$ und $i = 1, 2$ gilt

$$\| ((f - p)|_e)_{d_i^w} \| \leq K_e \cdot h^{q+1-w}.$$

#

Wir formulieren nun die zentrale Aussage über die Approximationsgüte dieser Lagrange-Interpolationsmethode. Sei $q \geq 5$, $f \in C^{q+1}(\Omega)$ und $s \in \mathcal{S}_q^1(\Delta)$ die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems bzgl. einer Lagrange-Interpolationsmenge L .

Theorem 5.4:

Es existiert eine Konstante $K > 0$ (nur abhängig von q, f, α und β), sodass für alle $w \in \{0, \dots, q\}$

$$\| D^w(f - s) \| \leq K \cdot h^{q+1-w}.$$

Beweis:

Wir zeigen, dass auf jedem Dreieck $T \in \Delta$ für die Interpolationsfunktion $p^{[T]} \equiv s|_T$ die Voraussetzungen von Lemma 2.6 mit $\sigma = q + 1$ erfüllt sind. Da die Interpolation lokal ist, müssen nur endlich viele Dreiecke in der Umgebung von T , und daher nur endlich viele Fälle betrachtet werden. Letztlich erhalten wir die Konstante K unabhängig von h als das Maximum aller in den verschiedenen Fällen auftretenden Konstanten. Wir betrachten folgende Fälle:

Fall 1: T ist vom Typ 0;

Sei L_T die Menge der Interpolationspunkte von L auf T . Dann gilt

$$|(f - s)|_T(z)| = 0, \quad z \in L_T.$$

Nach Lemma 2.6, mit $\sigma = q + 1$, gibt es daher eine Konstante $K_0 > 0$ (nur abhängig von q, f, α und β), sodass für $w \in \{0, \dots, q\}$

$$\|D^w(f - s)|_T\| \leq K_0 \cdot h^{q+1-w}.$$

Fall 2: T ist vom Typ 1;

Sei $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$, v_1 Eckpunkt eines Dreiecks vom Typ 0. Nach Lemma 5.3 gibt es eine Konstante $K_e > 0$ (nur abhängig von q, f, α und β), sodass

$$\|((f - s)|_e)_{d^w}\| \leq K_e \cdot h^{q+1-w},$$

für $w \in \{0, \dots, q\}$ und alle Kanten e von T . Dabei ist d ein Einheitsvektor entlang e . Im Knoten v_1 folgt nach Lemma 5.2

$$|D^2(f - p^{[T]})(v_1)| \leq C_2 \cdot h^{q-1},$$

für eine (nur von q, f, α und β abhängige) Konstante C_2 . Zusammen mit den Interpolationsbedingungen in L auf dem Dreieck T sind daher die Voraussetzungen von Lemma 2.6 mit $\sigma = q + 1$ erfüllt. Es gibt somit eine Konstante $K_1 > 0$ (nur abhängig von q, f, α und β), sodass für $w \in \{0, \dots, q\}$

$$\|D^w(f - s)|_T\| \leq K_1 \cdot h^{q+1-w}.$$

Fall 3: T ist vom Typ 2a;

Sei $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$, wobei v_1 und v_2 die Eckpunkte von Dreiecken niedrigeren Typs sind und $\tilde{T} = \Delta(v_1, v_2, v_0)$ das benachbarte Dreieck vom Typ ≤ 1 . Nach Lemma 5.3 gibt es eine Konstante $K_e > 0$ (nur abhängig von q, f, α und β), sodass

$$\|((f - s)|_e)_{d^w}\| \leq K_e \cdot h^{q+1-w},$$

für $w \in \{0, \dots, q\}$ und alle Kanten e von T . Sei jetzt $d_{i,j}$ ein Einheitsvektor entlang der Kante $[v_i, v_j]$ und α_i , $i = 1, 2$ der von $[v_1, v_0]$ und $[v_1, v_2]$ bzw. der von $[v_1, v_2]$ und $[v_1, v_3]$ eingeschlossene Winkel.

Aus $\sin(\alpha_1)d_{1,3} = \sin(\alpha_1 + \alpha_2)d_{1,2} - \sin(\alpha_2)d_{1,0}$ folgt dann für $l = 0, \dots, q - 1$, da \tilde{T} ein Dreieck wie in Fall 1 oder Fall 2 ist, dass

$$\begin{aligned} |(f - p^{[T]})_{d'_{1,2}d_{1,3}}(v_1)| &\leq \left| \frac{\sin(\alpha_1 + \sin(\alpha_2))}{\sin(\alpha_1)} (f - p^{[T]})_{d'_{1,2}}(v_1) \right| + \left| \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} (f - p^{[T]})_{d'_{1,2}d_{1,0}}(v_1) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} K_{e_{1,2}} \cdot h^{q-l} \right| + \left| \frac{1}{\sin(\alpha_1)} K_{0,1} \cdot h^{q-l} \right| \leq C_2 \cdot h^{q-l} \end{aligned}$$

mit einer (nur von q, f, α und β abhängigen) Konstanten $C_2 = \frac{1}{\sin(\alpha_1)} (K_{e_{1,2}} + K_{0,1}) > 0$. Zusammen mit den Interpolationsbedingungen in L auf T sind daher die Voraussetzungen

von Lemma 2.6 mit $\sigma = q + 1$ erfüllt. Es gibt also eine (nur von q, f, α und β abhängige) Konstante $K_2 > 0$, sodass für alle $w \in \{0, \dots, q\}$ gilt

$$\| D^w(f - s)|_T \| \leq K_2 \cdot h^{q+1-w}.$$

Fall 4: T ist vom Typ 2b;

Sei $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$, wobei v_1 und v_2 die Eckpunkte von Dreiecken niedrigeren Typs sind. Nach Lemma 5.3 gibt es eine Konstante $K_e > 0$ (nur abhängig von q, f, α und β), sodass für $w \in \{0, \dots, q\}$ und alle Kanten e von T gilt

$$\| ((f - s)|_e)_{d^w} \| \leq K_e \cdot h^{q+1-w}.$$

Dabei ist d ein Einheitsvektor entlang e . Für die Knoten $v_i, i = 1, 2$ gibt es nach Lemma 5.2 Konstanten $C_i > 0, i = 1, 2$ (nur abhängig von q, f, α und β), sodass

$$\| D^2(f - p^{[T]})(v_i) \| \leq C_i \cdot h^{q-1}.$$

Zusammen mit den Interpolationsbedingungen in L auf dem Dreieck T sind daher die Voraussetzungen von Lemma 2.6 mit $\sigma = q + 1$ erfüllt. Somit gibt es eine Konstante $K_3 > 0$ (nur abhängig von q, f, α und β), sodass für $w \in \{0, \dots, q\}$

$$\| D^w(f - s)|_T \| \leq K_3 \cdot h^{q+1-w}.$$

Fall 5: T ist vom Typ ≥ 3 ;

Für jede Kante e von T gibt es nach Lemma 5.3 eine Konstante $K_e > 0$ (nur abhängig von q, f, α und β), sodass für $w \in \{0, \dots, q\}$ gilt

$$\| ((f - s)|_e)_{d^w} \| \leq K_e \cdot h^{q+1-w}.$$

Sei e jetzt eine Kante von T zu einem benachbarten Dreieck niedrigeren Typs. Dann gibt es wie in Fall 3 eine (nur von q, f, α und β abhängige) Konstante C_e , sodass für alle $w \in \{0, \dots, q\}$ und alle $l = 0, \dots, q - 1$

$$|(f - p^{[T]})_{d^l \tilde{d}}(v)| \leq C_e \cdot h^{q-l},$$

wobei d und \tilde{d} Einheitsvektoren entlang e bzw. linear unabhängig zu e sind. Mit den Interpolationsbedingungen in L auf T sind somit die Voraussetzungen von Lemma 2.6 mit $\sigma = q + 1$ erfüllt. Es gibt daher eine (nur von q, f, α und β abhängige) Konstante $K_4 > 0$, sodass für $w \in \{0, \dots, q\}$

$$\| D^w(f - s)|_T \| \leq K_4 \cdot h^{q+1-w}.$$

#

Korollar 5.5:

Für jede Funktion $f \in C^{q+1}(\Omega)$ gibt es eine (nur von q , f , α und β abhängige) Konstante $K > 0$, sodass

$$\text{dist}(f, \mathcal{S}_q^1(\Delta)) \leq K \cdot h^{q+1}.$$

Bemerkung 5.6:

Es ist bekannt, dass fast-degenerierte Kanten und fast-singuläre Knoten bei der Berechnung des Interpolanten zu numerischen Instabilitäten führen können (vgl. Lai und Schumaker [22]). Solche Konstellationen werden hier durch den Winkel β beschrieben. In Anwendungsbereichen werden daher für $\beta \in [\pi - \epsilon, \pi + \epsilon]$, für ein geeignetes $\epsilon > 0$, die entsprechenden Kanten als kollinear interpretiert, und dann Pfade bzw. Interpolationspunkte anders gelegt.

Literaturverzeichnis

- [1] P. Alfeld, B. Piper, L.L.Schumaker: An explicit basis for C^1 quartic bivariate splines, SIAM Journal of Numerical Analysis **24** (1987) 891-911.
- [2] P. Alfeld, L.L. Schumaker: The Dimension of bivariate spline spaces of smoothness r and Grad $d \geq 4r + 1$, Constructive Approximation **3** (1987) 189-197.
- [3] P. Alfeld, B. Piper, L.L.Schumaker: Minimally supported bases for spaces of bivariate piecewise polynomials of smoothness r and degree $d \geq 4r + 1$, Computer Aided Geometric Design **4** (1987) 105-123.
- [4] P. Alfeld, L.L. Schumaker: Non-existence of star-supported spline bases, SIAM J. Math. Anal. **31** (2000) 1482-1501.
- [5] C. de Boor: A practical guide to splines, Springer Verlag, New York 1978.
- [6] C. de Boor, K. Höllig: Approximation order from bivariate C^1 cubics: a counterexample, Proceedings of the American Mathematical Society **87** (1983) 649-655.
- [7] C. de Boor: B-Form basics, in: G. Farin, (Ed.): Geometric Modeling, SIAM, Philadelphia 1987, 131-148.
- [8] C. de Boor and Q. Jia: A sharp upper bound on the approximation order of smooth bivariate pp functions, J. Approx. Theory **72** (1993) 24-33.
- [9] C.K. Chui, D. Hong: Construction of local C^1 quartic spline elements for optimal-order approximation, Mathematics of Computation **65** (1996) 85-98.
- [10] C.K. Chui, D. Hong: Swapping edges of arbitrary triangulations to achieve the optimal order of approximation, SIAM Journal of Numerical Analysis **34** (1997) 1472-1482.

- [11] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Approximation order of bivariate spline interpolation for arbitrary smoothness, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **90** (1998) 117-134.
- [12] O. Davydov: Locally linearly independent basis for C^1 bivariate Splines of degree $q \geq 5$, in: M. Daehlen, T. Lyche, L.L. Schumaker (Eds.): *Mathematical Methods for Curves and Surfaces II*, Vanderbilt University Press, Nashville 1998, 71-77.
- [13] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Cubic spline interpolation on nested polygon triangulations, in: A. Cohen, C. Rabut, L.L. Schumaker (Eds.): *Curve and Surface Fitting*, St. Malo 1999, Vanderbilt Univ. Press, Nashville 2000, 161-170.
- [14] O. Davydov, G. Nürnberger: Interpolation by C^1 splines of degree $q \geq 4$ on triangulations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **126** (2001) 159-183.
- [15] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Bivariate spline interpolation with optimal approximation order, *Constr. Approx.* **17** (2000) 181-208.
- [16] G. Farin: A modified Clough-Tocher interpolant, *CAGD* **2** (1985) 19-27.
- [17] G. Farin: Triangular Bernstein-Bézier Patches, *CAGD* **3** (1986) 83-127.
- [18] J. Gao: Interpolation by C^1 quartic bivariate splines, *Journal of Mathematical Research Expo.* **11** (1991) 433-442.
- [19] D. Hong: Spaces of bivariate spline functions over triangulations, *Approximation Theory and its Applications* **7** (1991) 56-75.
- [20] A. Ibrahim, L.L. Schumaker: Super spline spaces of smoothness r and degree $d \geq 3r + 2$, *Constructive Approximation* **7** (1991) 401-423.
- [21] N. Kohlmüller: Lagrange und Hermite Interpolation mit Splineräumen auf Triangulierungen, Doktorarbeit, Universität Mannheim 2001.
- [22] M.-J. Lai, L.L. Schumaker: On the approximation power of bivariate splines, *Advances in Computational Mathematics* **9** (1998) 251-279.
- [23] J. Morgan, R. Scott: A nodal basis for C^1 piecewise polynomials of degree $n \geq 5$, *Mathematics of Computation* **29** (1975) 736-740.
- [24] G. Nürnberger: *Approximation by Spline Functions*, Springer Verlag, Berlin 1989.
- [25] G. Nürnberger, Th. Riessinger: Lagrange and Hermite interpolation by bivariate splines, *Numer. Funct. Anal. Optim.* **13** (1992) 75-96.
- [26] G. Nürnberger: Approximation order of bivariate spline interpolation: *Journal of Approximation Theory* **87** (1996) 117-136.
- [27] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Lagrange interpolation by splines on triangulations, in: R.H. Wang (Ed.): *Proceedings of the Morningside Institute*, Peking 1998.

- [28] G. Nürnberger, G. Walz: Error analysis in interpolation by bivariate C^1 -splines, IMA J. Numer. Anal. **18** (1998) 485-508.
- [29] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by spline spaces on classes of triangulations, J. Comput. Appl. Math. **119** (2000) 347-376.
- [30] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Developments in bivariate spline interpolation, Journal of Computational and Applied Mathematics **121** (2000), 125-152.
- [31] G. Nürnberger, L.L. Schumaker, F. Zeilfelder: Local Lagrange interpolation by bivariate C^1 cubic splines, in: T. Lyche and L.L. Schumaker (Eds.), Mathematical Methods in CAGD: Oslo 2000, Vanderbilt Univ. Press, Nashville 2001, 393-404.
- [32] L.L. Schumaker: Bounds on the dimension of spaces of multivariate piecewise polynomials, Rocky Mountain Journal of Mathematics **14** (1984) 251-264.
- [33] L.L. Schumaker: Dual bases for spline spaces on a cell, Computer Aided Geometric Design **5** (1987) 277-284.